# DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

---

1. On pose

$$A_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi \, d\varphi \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) ;$$

calculer $A_1$ ; montrer par récurrence que :

$$A_k = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2k)} \cdot \frac{\pi}{2} .$$

2. Rappeler quel est le développement en série entière de

$$(1 - x)^{\frac{1}{2}} \qquad (|x| < 1) .$$

3. Soient $a \in [0, 1]$, $r \in ]0, +\infty]$ ; dans le plan rapporté à deux axes orthonormés $Ox$, $Oy$, on désigne par :

— $\Gamma$ l'ensemble des points $(x, y)$ tels que : $x^2 + y^2 \leqslant 1$ ;

— $\gamma(a)$ l'ensemble des points $(x, y)$ tels que :

$$(x - a)^2 + y^2 \leqslant (1 - a)^2 ;$$

— $\Gamma(a)$ l'ensemble des points $(x, y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad (x - a)^2 + y^2 > (1 - a)^2 ;$$

— $\Gamma_r$ l'ensemble des points $(x, y)$ tels que : $x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

On pose :

$$I(a) = \iint_{\Gamma} \sqrt{(x - a)^2 + y^2} \, dx \, dy ;$$

$$J(r) = \iint_{\Gamma_r} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy ;$$

$$K(a) = \iint_{\Gamma(a)} \sqrt{(x - a)^2 + y^2} \, dx \, dy .$$

3.1. Calculer $J(r)$ ; en déduire $I(0)$.

Montrer que $I(a) = K(a) + J(1 - a)$.

3.2. Soit P un point du plan (et A $(a, 0)$) ; on pose : $\psi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AP})$, $l = |\overrightarrow{AP}|$.

Montrer que si $a < 1$ le domaine $\Gamma(a)$ est l'ensemble des points P pour lesquels :

$$1 - a < l \leqslant 1 + a , \qquad \psi_0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi - \psi_0 ,$$

où $\psi_0$ est lié à $l$ par :

$$a^2 + 2al \cos \psi_0 + l^2 = 1 , \qquad \psi_0 \in [0, \pi] . \tag{1}$$

En déduire que :

$$K(a) = \int_{1-a}^{1+a} 2 l^2 (\pi - \psi_0) \, dl . \tag{2}$$

On posera pour la suite : $\pi - \psi_0 = \varphi$.

3.3. Examiner le cas $a = 1$. Calculer $K(1)$ et $I(1)$.

3.4. On suppose $a < 1$ ; exprimer $l$ en fonction de $\varphi$ ; montrer que :

$$K(a) = - J(1 - a) + H(a) ,$$

où :

$$H(a) = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi .$$

En utilisant les résultats des questions 1 et 2, exprimer $H(a)$ comme somme d'une série entière de puissances de $a^2$.

4.1. Montrer que $I(a)$ reste bornée quand $a$ varie dans $[0, 1]$ ; en déduire que la série :

$$S = \sum_{n>1} \left( \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n-2)} \right)^2 \frac{1}{n^2 (2n - 3)} \tag{3}$$

est convergente.

4.2. Il se trouve que $\lim_{a \to 1} I(a) = I(1)$ ; sans chercher à établir ce résultat, en déduire la valeur de la somme S de la série (3).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail